6 MAGGIO 2020 - "FASE 2"!

II. PROPRIETÀ FRATTALI DEL MOTO BROWNIANO

[MÖRTERS - PERES]

1. DIMENSIONE E MISURA DI HAUSDORFF

DEFINIAMO UNA NOZIONE DI DIMENSIONE NON INTERA PER SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^d$. (IN REALTÀ TUTTO SI APPLICA A SPAZI METRICI GENERALI.)

DIAMETRO DI UN INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^d$

$$|A| := \sup \{ \underbrace{|x-y|}_{\text{DISTANZA EUCLIDEA IN } \mathbb{R}^d} : x, y \in A \}$$

IDEA: UN INSIEME 1-DIMENSIONALE HA LUNGHEZZA $\approx |A|^1$
" 2- " " AREA $\approx |A|^2$
" 3- " " VOLUME $\approx |A|^3$

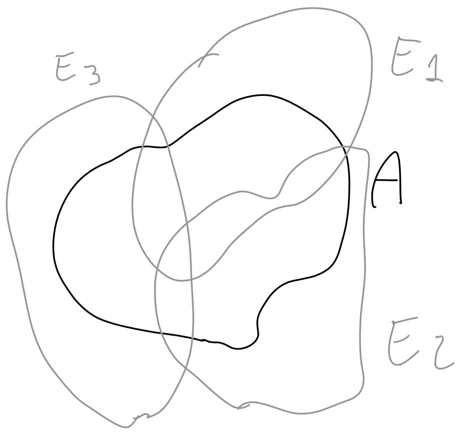
LUNGHEZZA, AREA, VOLUME SONO "MISURE α-DIM." DI UN INSIEME, $\alpha = 1, 2, 3$

DEFINIZIONE (MISURA DI HAUSDORFF)

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^d$ LIMITATO. SIANO $\alpha \in [0, \infty)$, $\delta \in (0, \infty)$.

- $\underbrace{\mathcal{H}^\alpha_\delta(A)}_{\text{"}\alpha\text{-HAUSDORFF CONTENT" A LIVELLO } \delta} := \inf \{ \sum_{i=1}^\infty |E_i|^\alpha : \underbrace{(E_i) \text{ RICOPRIMENTO DI } A}_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i \supseteq A} \text{ CON } |E_i| < \delta \}$

- $\underbrace{\mathcal{H}^\alpha(A)}_{\alpha\text{-MISURA DI HAUSDORFF}} := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$



IDEA: $\sum_i |E_i|^\alpha$ DESCRIVE LA "MISURA α-DIM." DEL RICOPRIMENTO (E_i) DI A.

$\boxed{\text{OSS.}}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \le \mathcal{H}^\alpha(A) \le \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \varepsilon$

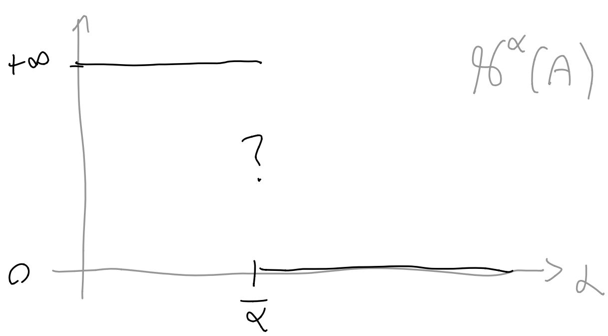
$\exists$ RICOPR. (F_i) CON $|F_i| < \delta$, $\forall$ RICOPR. (E_i) CON $|E_i| < \delta$

$$\sum_i |F_i|^\alpha - \varepsilon \le \mathcal{H}^\alpha(A) \le \sum_i |E_i|^\alpha + \varepsilon$$

ESERCIZIO: $$\mathcal{H}^\alpha(\underbrace{[0,1]^n}_{A}) = \begin{cases} 0 & \text{SE } \alpha > n \\ c \in (0,\infty) & \text{SE } \alpha = n \\ \infty & \text{SE } \alpha < n \end{cases}$$

LEMMA: $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, SE $\mathcal{H}^\alpha(A) < \infty$, ALLORA

$$\mathcal{H}^\beta(A) = \begin{cases} 0 & \text{SE } \beta > \alpha \\ \infty & \text{SE } \beta < \alpha \end{cases}$$



DEFINIZIONE (DIM. DI HAUSDORFF)

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^d$ LIMITATO. SI DEFINISCE DIMENSIONE (DI HAUSDORFF) DI A

$$\dim(A) := \inf\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = \infty\}$$

$$= \inf\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) < \infty\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) > 0\}$$

OSS. SE $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ALLORA $\dim(A) \in [0, d]$. INOLTRE

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \begin{cases} 0 & \text{SE } \alpha > \dim(A) \\ C \in [0, +\infty] & \text{SE } \alpha = \dim(A) \\ +\infty & \text{SE } \alpha < \dim(A) \end{cases}$$

LEMMA

SIA $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ α-HÖLDER: $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha$ $\exists C$ $\forall x, y$

ALLORA $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ (LIMITATO) SI HA $\dim(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim(A)$

PIÙ PRECISAMENTE: $\forall \beta \geq 0$ $\mathcal{H}^\beta(f(A)) \leq C^\beta \mathcal{H}^{\alpha\beta}(A)$.

DIM. ESERCIZIO.

2. MOTO BROWNIANO: STIME DALL'ALTO SULLA DIMENSIONE DI HAUSDORFF.

LE STIME DALL'ALTO SULLA DIM. DI HAUSDORFF SONO "ELEMENTARI": SI PUÒ SFRUTTARE IL LEMMA PRECEDENTE, OPPURE "ESIBIRE" UN RICOPRIMENTO

TEOREMA (RICHIAMI)

TRAIETT. CONTINUE

SIA $B = (B_t)_{t \geq 0}$ M.B. IN $\mathbb{R}^d$. SIA $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

PER Q.O. $\omega \in \Omega$, LA TRAIETT. $B_\cdot(\omega) : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto B_t(\omega)$ È α-HÖLDER.

SIA $B = (B_t)_{t \geq 0}$ M.B. IN $\mathbb{R}^d$. PER $A \subseteq [0, \infty)$ DEF.

$$\text{RANGE}(A) := B_A = \{ B_t : t \in A \} = \{ \text{PUNTI DI } \mathbb{R}^d \text{ VISITATI DAL M.B. PER TEMPI IN } A \}$$

SOTTOLINEIAMO CHE RANGE(A) È UN SOTTOINSIEME ALEATORIO DI $\mathbb{R}^d$

COROLLARIO

CONSIDERIAMO IL M.B. IN $\mathbb{R}^d$. ALLORA, Q.C., SI HA

$$\dim(\text{RANGE}(A)) \leq 2 \dim(A), \quad \forall A \subseteq [0,1]$$

IN PARTICOLARE, Q.C. $\dim(\text{RANGE}([0,1])) \leq 2$, $\forall$ DIM. d.

$(d \geq 2)$

(MOSTREREMO IN EFFETTI CHE $\dim(\text{RANGE}([0,1])) = 2 \quad \forall d \geq 2$)

DIM. $\dim(\text{RANGE}(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim(A)$, $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{2})$. $\lim_{\alpha \uparrow 2} \dots$ ∎

CONSIDERIAMO ORA IL M.B. 1-DIM. $B = (B_t)_{t \geq 0}$ E DEFINIAMO

$$\text{ZERI}(A) := \{ t \in A : B_t = 0 \} \qquad \text{PER } A \subseteq [0, \infty).$$

SOTTOLINEIAMO CHE ZERI(A) È UN SOTTOINSIEME ALEATORIO DI A.

TEOREMA

PER IL M.B. IN $\mathbb{R}$, SI HA CHE Q.C. $\dim(\text{ZERI}([0,1])) \leq \frac{1}{2}$

(MOSTREREMO CHE IN EFFETTI $\dim(\text{ZERI}([0,1])) = \frac{1}{2}$, Q.C.).

DIM. FISSIAMO $\varepsilon > 0$ E MOSTRIAMO CHE

$$\dim(\text{ZERI}([\varepsilon, 1])) \leq \frac{1}{2}.$$

CIÒ BASTA PERCHÉ $\dim\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim(A_n)$ $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ESERCIZIO

SIA $k \in \mathbb{N}$, SIA $I_j^{(k)} := \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right)$ CON $j = 0, \dots, 2^k - 1$ (INTERVALLI DIADICI)

CONSIDERIAMO IL RICOPRIMENTO (ALEATORIO) DI ZERI$([\varepsilon,1])$ DEF. DA

$$\mathcal{E}_k := \left\{ I_j^{(k)} : I_j^{(k)} \cap \text{ZERI}([\varepsilon,1]) \neq \emptyset \right\} \qquad |I_j^{(k)}| = 2^{-k}$$

CI BASTA DIMOSTRARE CHE, Q.C., $\exists$ SUCCESSIONE $k_n \to \infty$ T.C.

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\text{ZERI}([\varepsilon,1])) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{2^{-k_n}}(\text{ZERI}([\varepsilon,1])) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{I \in \mathcal{E}_{k_n}} |I|^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{Q.C.}, \quad \liminf_{k \to \infty} \sum_{I \in \mathcal{E}_k} |I|^{1/2} < \infty$$

MOSTRIAMO CHE $E\left[\liminf_{k\to\infty} \sum_{I\in\mathcal{E}_k} |I|^{1/2}\right] \overset{\text{FATOU}}{\le} \liminf_{k\to\infty} E\left[\sum_{I\in\mathcal{E}_k}|I|^{1/2}\right] < \infty$

SI HA

$$E\left[\sum_{I\in\mathcal{E}_k}|I|^{1/2}\right] = E\left[\sum_{j=0}^{2^k-1} |I_j^{(k)}|^{1/2}\, \mathbb{1}_{\{I_j^{(k)}\cap \text{ZERI}([\varepsilon,1])\neq\emptyset\}}\right] = \sum_{j=0}^{2^k-1} 2^{-\frac{k}{2}}\, P\left(I_j^{(k)}\cap \text{ZERI}([\varepsilon,1])\neq\emptyset\right)$$

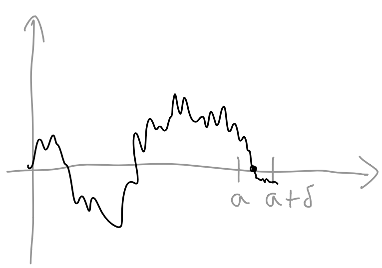
VALE LA STIMA SEGUENTE:

$(*)$ $\exists\, C<\infty : \forall\, a,\delta>0 : P\left([a,a+\delta)\cap \text{ZERI}([0,\infty))\neq\emptyset\right) \le C\sqrt{\dfrac{\delta}{a+\delta}}$

ALLORA $P\left(I_j^{(k)}\cap \text{ZERI}([\varepsilon,1])\neq\emptyset\right) \le C\sqrt{\dfrac{2^{-k}}{(\varepsilon-2^{-k})+2^{-k}}} = \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,2^{-k/2}$

INFINE $E\left[\sum_{I\in\mathcal{E}_k}|I|^{1/2}\right] \le \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j=0}^{2^k-1} 2^{-k/2}\,2^{-\frac{k}{2}} = \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon}} < \infty.$ ∎

DIM. DI $(*)$. VEDI [MÖRTERS-PERES] - EURISTICA



$$B_{a+\delta} \overset{d}{=} \sqrt{a+\delta}\, B_1$$

$$P(\exists\, t\in[a,a+\delta) : B_t=0) \overset{\le C\cdot}{\approx} P\left(|B_{a+\delta}|\le\sqrt{\delta}\right) = P\left(|B_1|\le\sqrt{\frac{\delta}{a+\delta}}\right) \le 2\sqrt{\frac{\delta}{a+\delta}}$$ ∎

OSS. SE $d \geq 2$, $\forall z \in \mathbb{R}^d$, $P(\exists t \in (0,\infty) : B_t = z) = 0$.

3. STIME DAL BASSO PER LA DIM. DI HAUSDORFF: DISTRIBUZIONE DI MASSA

TEOREMA (DISTRIBUZIONE DI MASSA)

SIA μ MISURA SU $\mathbb{R}^d$ CON LA SEGUENTE PROPRIETÀ: $\exists\, C < \infty$, $\delta > 0$ T.C.

$$\mu(V) \leq C|V|^\alpha \qquad \forall\, V \subseteq \mathbb{R}^d \text{ CHIUSO CON } |V| < \delta.$$

SE $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ SODDISFA $0 < \mu(A) < \infty$, ALLORA $\dim(A) \geq \alpha$.

PIÙ PRECISAMENTE: $\mathcal{H}^\alpha(A) \geq \frac{\mu(A)}{C} > 0$.

DIM. SIA (E_i) RICOPRIMENTO DI A CON $|E_i| < \delta$, SIA $\bar{E}_i$ = CHIUSURA DI E_i.

PER HP $A \subseteq \bigcup_i E_i \subseteq \bigcup_i \bar{E}_i$ E $|\bar{E}_i| = |E_i| < \delta$

$$\Rightarrow \quad 0 < \mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup_i \bar{E}_i\Big) \leq \sum_i \mu(\bar{E}_i) \leq C \sum_i |E_i|^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^\alpha(A) \geq \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \geq \frac{\mu(A)}{C} > 0.$$

$\blacksquare$

TEOREMA

SIA B = M.B. IN $\mathbb{R}$. Q.C. SI HA $\dim(\mathrm{ZERI}([0,1])) \geq \frac{1}{2}$.

DIM. SIA $M_t := \max_{s \in [0,t]} B_s$ E $Y_t := M_t - B_t$

ABBIAMO MOSTRATO CHE Y È M.B. RIFLESSO $\Rightarrow$ L'INSIEME DEGLI ZERI DI B E QUELLO DI Y HANNO LA STESSA DISTRIBUZIONE.

DEFINIAMO ALLORA

$$REC([0,1]) = \{t \in [0,1] : Y_t = 0\}$$
$$= \{t \in [0,1] : B_t = M_t\}$$

CI BASTA MOSTRARE CHE

$$\text{Q.C.} \qquad \dim(REC([0,1])) \geq \frac{1}{2}$$

PER $\omega \in \Omega$, LA FUNZIONE $t \mapsto M_t(\omega)$ È CONTINUA E NON-DECRESCENTE

$\Rightarrow$ ESSA È LA "FUNZIONE DI RIPARTIZIONE" DI UNA MISURA $\mu = \mu^\omega$ SU $[0,1]$

$$\mu((s,t]) := M_t - M_s$$

MOSTRIAMO SOTTO CHE Q.C. $\mu(\underbrace{REC([0,1])^c}_{=[0,1]\setminus REC([0,1])}) = 0$.

DUNQUE $\mu(REC([0,1])) = \mu([0,1]) = M_1 - M_0 = \underbrace{M_1}_{\overset{d}{=}|B_1|} \in (0,\infty)$ Q.C.

FISSIAMO $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$. SAPPIAMO CHE

$$\text{Q.C.} \quad \exists\, C = C_\omega < \infty : \quad |B_t - B_s| \leq C|t-s|^\alpha \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq 1$$
$$\Rightarrow M_t - M_s \leq C|t-s|^\alpha$$

$\Rightarrow \forall\, V \subseteq [0,1]$ (MIS.), $V \subseteq [s,t] = [\inf V, \sup V] \Rightarrow \mu(V) \leq M_t - M_s \leq \underbrace{C|t-s|^\alpha}_{= C|V|^\alpha}$

$\Rightarrow \dim(REC([0,1])) \geq \alpha, \quad \forall\, \alpha \in (0,\frac{1}{2}). \Rightarrow \geq \frac{1}{2}$ ∎

DIM. CHE Q.C. $\mu(REC([0,1])^c) = 0$.

BASTA MOSTRARE CHE $\forall\ t \in REC([0,1])^c\ \exists\ \delta = \delta_t > 0$ T.C. $\mu(t-\delta, t+\delta) = 0$.

SIA $t \in REC([0,1])^c$, OSSIA $B_t < M_t \Rightarrow$ PER CONTINUITÀ $\exists\ \delta = \delta_{\omega, t} > 0$:

$$B_s < M_t \quad \forall s \in (t-\delta, t+\delta)$$

- $M_{t+\delta} = M_t \vee \max_{s \in [t, t+\delta]} B_t = M_t$ · ANALOG. $M_t = M_{t-\delta} \vee (\cdots) = M_{t-\delta}$

INFINE $\mu((t-\delta, t+\delta)) = M_{t+\delta} - M_{t-\delta} = 0$.

∎

LEMMA.

SIA μ MISURA FINITA SU $\mathbb{R}^d$. SIA $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ T.C.

$$\forall x \in A\ \exists\ \delta = \delta_x > 0 : \quad \mu(B(x, \delta)) = 0.$$

ALLORA $\mu(A) = 0$.

DIM. PER "REGOLARITÀ DELLA MISURA"

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ COMPATTO}\}$$

ALLORA $\forall\ K \subseteq A$ COMPATTO SI HA $\mu(K) \leq \ldots = 0$.

∎

4. STIME DAL BASSO PER LA DIM. DI HAUSDORFF: METODO DELL'ENERGIA

TEOREMA (METODO DELL'ENERGIA)

SIA μ MISURA SU $\mathbb{R}^d$ T.C.

$$I^\alpha(\mu) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\mu(dx)\,\mu(dy)}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

SE $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ SODDISFA $0 < \mu(A) < \infty$, ALLORA $\dim(A) \geq \alpha$.

PIÙ PRECISAMENTE $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \geq \dfrac{\mu(A)^2}{\displaystyle\iint_{\{|x-y|<\delta\}} \frac{\mu(dx)\,\mu(dy)}{|x-y|^\alpha}} \Rightarrow \mathcal{H}^\alpha(A) = \infty.$

DIM. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists (E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ RICOPR. DI A CON $|E_i| < \delta$ T.C.

$$\sum_i |E_i|^\alpha \leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \varepsilon$$

POSSIAMO SUPPORRE CHE GLI E_i SIANO:

- MISURABILI $\quad (E_i \rightsquigarrow \bar{E}_i : \quad |\bar{E}_i| = |E_i|)$
- CONTENUTI IN A $\quad (E_i \rightsquigarrow E_i \cap A)$
- DISGIUNTI $\quad (E_i \rightsquigarrow E_i \setminus \bigcup_{j<i} E_j)$

$\Big\}\ A = \bigcup_i E_i$

ALLORA $\mu(A) = \sum_i \mu(E_i) = \sum_i |E_i|^{\alpha/2} \dfrac{\mu(E_i)}{|E_i|^{\alpha/2}}$

CAUCHY-SCHWARZ: $\mu(A)^2 \leq \underbrace{\left(\sum_i |E_i|^\alpha\right)}_{\leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \varepsilon} \left(\sum_i \frac{\mu(E_i)^2}{|E_i|^\alpha}\right)$

RESTA DA MOSTRARE CHE $\sum_i \frac{\mu(E_i)^2}{|E_i|^\alpha} \leq \iint_{\{|x-y|<\delta\}} \frac{\mu(dx)\,\mu(dy)}{|x-y|^\alpha}$

$$\iint_{\{|x-y|<\delta\}} \frac{\mu(dx)\,\mu(dy)}{|x-y|^\alpha} \geq \iint_{\{|x-y|<\delta\}\cap(A\times A)} \cdots \geq \sum_i \iint_{\cancel{\{|x-y|<\delta\}}\cap(E_i\times E_i)} \cdots$$

$$\geq \sum_i \frac{1}{|E_i|^\alpha} \underbrace{\iint_{E_i\times E_i} \mu(dx)\,\mu(dy)}_{\mu(E_i)^2}.$$

$\blacksquare$

TEOREMA

SE $d \geq 2$, $\dim(\text{RANGE}([0,1])) \geq 2$ Q.C.

DIM. FISSIAMO $\omega \in \Omega$. LA TRAIETTORIA $B_\cdot(\omega) : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ PUÒ ESSERE PENSATA COME UNA V.A. IN t SU $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Leb})$

SIA $\mu = \mu^\omega$ LA SUA LEGGE SU $\mathbb{R}^d$:

$$\mu(A) = \text{Leb}\{t \in [0,1] : B_t \in A\}$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu = \int_0^1 f(B_t)\,dt.$$

PER COSTRUZIONE $\mu(\text{RANGE}([0,1])) = 1$.

SE VERIFICHIAMO CHE $I^\alpha(\mu) < \infty \ \forall \alpha \in (0,2)$,
SEGUE DAL TEOR. PREC. CHE

$$\dim(\text{RANGE}([0,1])) \geq \alpha \quad (\ldots \geq 2)$$

$$I^\alpha(\mu) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\mu(dx)\,\mu(dy)}{|x-y|^\alpha} = \int_0^1 ds \int_0^1 dt \, \frac{1}{|B_s - B_t|^\alpha}$$

MOSTRIAMO CHE $E[I^\alpha(\mu)] < \infty \Rightarrow I^\alpha(\mu) < \infty$ Q.C.

$$E[I^\alpha(\mu)] = 2\int_0^1 ds \int_s^1 dt \, \underbrace{E\left[\frac{1}{|B_t - B_s|^\alpha}\right]}_{\frac{1}{|t-s|^{\alpha/2}} \cdot \underbrace{E\left[\frac{1}{|Z|^\alpha}\right]}_{}} \qquad Z \sim N(0, I_d)$$

$C < \infty \ \forall \alpha \in (0,2)$
PER $d \geq 2$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|z|^\alpha} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{(2\pi)^{d/2}} \, dz$$

$$= 2C \int_0^1 ds \int_s^1 dt \, \frac{1}{|t-s|^{\alpha/2}}$$

$$\leq 2C \int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha/2}} < \infty.$$

$\blacksquare$